# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

# «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

**Кафедра МОЭВМ**

# ОТЧЕТ

**по лабораторной работе №1**

# по дисциплине «Элементы функционального анализа» Тема: Норма элемента

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студентка гр. 1384 |  | Усачева Д. В. |
| Преподаватель |  | Коточигов А.М. |

Санкт-Петербург, 2024

# Задание.

# Вариант 17.

В R3 задан многогранник W и две точки x и y. Требуется вычислить норму Минковского для ||x|| , ||y|| и ||x+y||. Способ задания W: в условии даны шесть точек (вершины в первом октанте) {{7, 11, 0}, {10, 0, 8}, {0, 9, 12}, {13, 0, 0}, {0, 13, 0}, {0, 0, 13}}

# Основные теоретические положения.

*Выпуклость*. Выпуклым телом называется выпуклое множество W, в котором существует такая точка w, что для любого x ∈ X найдется число ε(x) > 0 такое, что множество W содержит отрезок w + tx, при всех t ∈ (−ε(x); ε(x)).

*Норма Минковского***.** Пусть W – выпуклое множество и 0 является его внутренней точкой. Нормой Минковского, порожденной множеством W, называется:

||x|| = inf { λ : x/λ ∈ W, λ > 0 }, x ∈ W => -x ∈ W.

*Теорема Минковского*. Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой, то выражение ||x|| = inf { λ : x/λ ∈ W, λ > 0 } задает норму в пространстве X.

*Биортогональный базис.* Это набор векторов в линейном пространстве, для которого каждый вектор ортогонален всем остальным векторам в этом наборе, за исключением самого себя, и все они нормированы (имеют единичную длину).

# Выполнение работы.

Для построения многогранника нужно трижды отразить координаты относительно координатных плоскостей.

Для выполнения Теоремы Минковского требуется выполнение свойств:

1. Нулевой элемент является внутренней точкой множества многогранника (верно по условию задания)
2. x ∈ W => -x ∈ W (верно, тк многогранник симметричен)
3. Выпуклость многогранника (верно)

Заданы следующие точки в первом октанте:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | X | Y | Z |
| D | 7 | 11 | 0 |
| E | 10 | 0 | 8 |
| G | 0 | 9 | 12 |
| A | 13 | 0 | 0 |
| K2 | 0 | 13 | 0 |
| C | 0 | 0 | 13 |

Остальные вершины получаются зеркальным отражением относительно координатных плоскостей (если v = (x, y, z) вершина, то и u = (+-x, +-y, +-z) тоже вершина). Всего 18 вершин. Полученный многогранник представлен на рисунке 1.

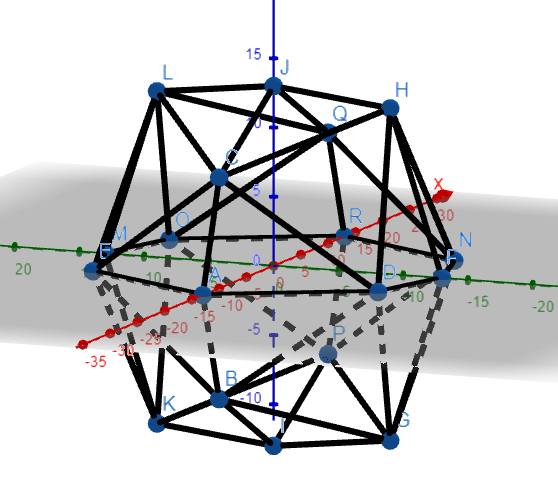


Рис. 1. многогранник.

Уравнения плоскостей для граней в первом октанте:

* ADE: 88\*x + 48\*y + 33\*z - 1144 = 0
* CEG: 45\*x + 10\*y + 90\*z - 1170 = 0
* K2DG: -24\*x - 84\*y - 28\*z + 1092 = 0
* DEG: -116\*x - 92\*y - 83\*z + 1824 = 0

Проверим, является ли многогранник выпуклым множеством. Для этого воспользуемся следующим условием выпуклости многогранника: для любой плоскости грани все вершины лежат в одном полупространстве. У W 32 грани, но в силу симметрии, достаточно проверить грани в первом квадранте.

Вершины:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вершины/Плоскости | ADE | CEG | K2DG | DEG |
| 1. (-13, 0, 0) | - | - | + | + |
| 2. (-10, 0, -8) | - | - | + | + |
| 3. (-10, 0, 8) | - | - | + | + |
| 4. (-7, -11, 0) | - | - | + | + |
| 5. (-7, 11, 0) | - | - | + | + |
| 6. (0, -13, 0) | - | - | + | + |
| 7. (0, -9, -12) | - | - | + | + |
| 8. (0, -9, 12) | - | - | + | + |
| 9. (0, 0, -13) | - | - | + | + |
| 10. (0, 0, 13) | - | 0 | + | + |
| 11. (0, 9, -12) | - | - | + | + |
| 12. (0, 9, 12) | - | 0 | 0 | 0 |
| 13. (0, 13, 0) | - | - | 0 | + |
| 14. (7, -11, 0) | - | - | + | + |
| 15. (7, 11, 0) | 0 | - | 0 | 0 |
| 16. (10, 0, -8) | - | - | + | + |
| 17. (10, 0, 8) | 0 | 0 | + | 0 |
| 18. (13, 0, 0) | 0 | - | + | + |

Все знаки совпадают.

Многогранник выпуклый, то есть условия теоремы Минковского выполнены.

Найдем биортогональный базис для каждой из граней в первом октанте:

1. Конус OADE. Найдем биортогональный базис для OA, OE, OD:

OA` = (1 / (OA1, OA)) \* OA1 = (0.0769, -0.0489, -0.0961), OA1 = OE × OD

OE` = (1 / (OE1, OE)) \* OE1 = (0, 0, 0.125), OE1 = OA × OD

OD` = (1 / (OD1, OD)) \* OD1 = (0, 0.0909, 0), OD1 = OA × OE

1. Конус OCEG. Найдем биортогональный базис для OC, OE, OG:

OD` = (1 / (OD1, OD)) \* OD1 = (0.0656, 0.0492, -0.0820), OD1 = OE× OG

OE` = (1 / (OE1, OE)) \* OE1 = (0.0541, -0.0344, 0.0574), OE1 = OG × OD

OG` = (1 / (OG1, OG)) \* OG1 = (-0.0481, 0.0306, 0.0601), OG1 = OD × OE

1. Конус OK2DG. Найдем биортогональный базис для OB, OG, OD:

O B` = (1 / (OB1, OB)) \* O B1 = (-0.1209, 0.0769, -0.1282), OB1 = OD× OG

OD` = (1 / (OD1, OD)) \* OD1 = (0.1429, 0, 0), OD1 = OG × OB

OG` = (1 / (OG1, OG)) \* OG1 = (0, 0, 0.1111), OG1 = OD × OB

1. Конус ODEG. Найдем биортогональный базис для OE, OG, OD:

OC` = (1 / (OC1, OC)) \* OC1 = (-0.0615, -0.0462, 0.0769), OC1 = OE× OG

OE` = (1 / (OE1, OE)) \* OE1 = (0.1, 0, 0), OE1 = OG × OC

OG` = (1 / (OG1, OG)) \* OG1 = (0, 0.0667,0,), OG1 = OE × OC

Зададим векторы, для которых необходимо вычислить норму.

X = -A\_(1, 1)\* A\_1 + E\_(1, 3) \* E\_1 = [89 0 64]

Y = C\_(1, 3) \* C\_1 - D\_(1, 2)\* D\_1 = [ 77 121 169]

Найдем коэффициенты разложения и норму для каждой точки по каждому базису:

1. Следовательно, раскладываем векторы по базису OA, OE, OD:

0X = k1 \* 0A + k2 \* 0E + k3 \* 0D

k1 = (0X, 0A`), k2 = (0X, 0E`), k3 = (0X, 0D`)

||X|| = k1+ k2+ k3 = 3.6923076923

0Y = k1 \* 0 K1 + k2 \* 0E + k3 \* 0D

k1 = (0Y, 0 K1`), k2 = (0Y, 0E`), k3 = (0Y, 0D`)

||Y|| = k1+ k2+ k3 = 11.790209790199999

0Z = 0X + 0Y = k1 \* 0 K1 + k2 \* 0E + k3 \* 0D

k1 = (0Z, 0 K1`), k2 = (0Z, 0E`), k3 = (0Z, 0D`)

||Z|| = k1+ k2+ k3 = 15.482517482500004

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | k1 | k2 | k3 | ||W|| = k1 + k2 + k3 |
| X | 0.692 | 8 | 0 | 8.692 |
| Y | -16.25 | 21.125 | 11.0 | 16.875 |
| X+Y=Z | -15.557 | 29.125 | 11.0 | 24.568 |

Далее все считается аналогичным образом.

2) По базису OE, OG, OD

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | k1 | k2 | k3 | ||W|| = k1 + k2 + k3 |
| X | 0.590 | 8.487 | -0.433 | -1.624 |
| Y | -2.852 | 9.697 | 10.158 | 17.694 |
| X+Y=Z | -2.262 | 18.184 | 9.726 | 25.648 |

3) по базису OB, OG, OD:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | k1 | k2 | k3 | ||W|| = k1 + k2 + k3 |
| X | -18.963 | 12.714 | 7.111 | 1.862 |
| Y | -21.667 | 11.000 | 18.778 | 8.111 |
| X+Y=Z | -40.630 | 23.714 | 25.889 | 9.973 |

4) по базису OC, OE, OG:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | k1 | k2 | k3 | ||W|| = k1 + k2 + k3 |
| X | -0.554 | 8.900 | -0.433 | 7.913 |
| Y | 2.677 | 7.700 | 8.067 | 18.444 |
| X+Y=Z | 2.123 | 16.600 | 8.067 | 26.790 |